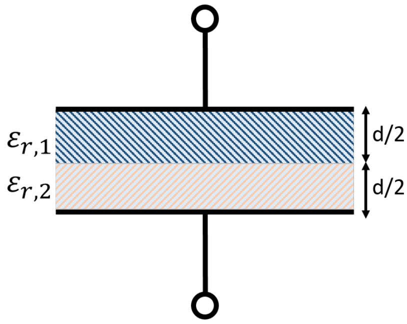
12 Mai 2025 *Vincent Benjamin*

Corrigé 10

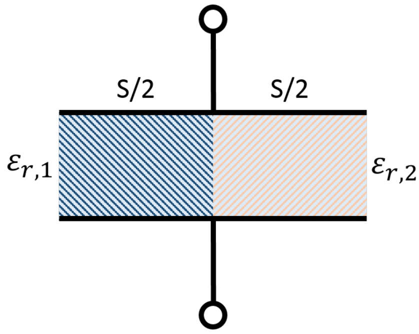
Exercice 1 : Condensateur plan avec des diélectriques

Soit un condensateur plan de surface S pour lequel les effets de bord sont négligeables. Les 2 plaques sont séparées par une distance d. On remplit le condensateur par deux diélectriques de permittivités relatives $\varepsilon_{r,1}$ et $\varepsilon_{r,2}$ sur une surface S et une épaisseur $d/2$ pour chacun des diélectriques.



(a) Montrez que la capacité est $C = \frac{2\varepsilon_0 S}{d}\frac{\varepsilon_{r,1}\cdot\varepsilon_{r,2}}{\varepsilon_{r,1}+\varepsilon_{r,2}}$.

(b) Refaites le même problème avec le condensateur de la figure ci-dessous (chacun des diélectriques sur une surface $S/2$ et épaisseur d) et montrez que la capacité du condensateur est $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{\varepsilon_{r,1}+\varepsilon_{r,2}}{2}$

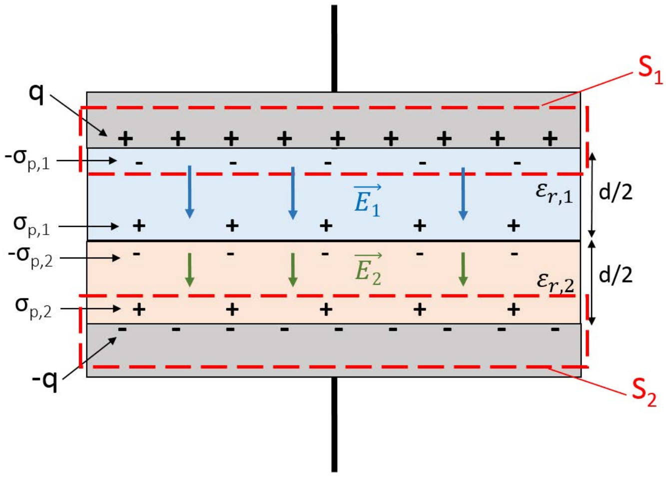


Solution :

(a) A cause de la charge q sur le condensateur, il y a un champ électrique entre les plaques qui polarise les deux diélectriques. La conséquence est la génération des densités de charge de surface $\sigma_{p,1}$ et $\sigma_{p,2}$

$$\sigma_{p,1} = \chi_1\varepsilon_0 E_1$$
$$\sigma_{p,2} = \chi_2\varepsilon_0 E_2$$

où E_1 et E_2 sont, respectivement, les intensités des champs électriques dans les diélectriques 1 et 2, tous les deux orthogonaux aux plaques, tandis que $\chi_1 = \varepsilon_{r,1} - 1$ et $\chi_2 = \varepsilon_{r,2} - 1$ sont les susceptibilités électriques correspondantes, voir figure ci-dessous.



Pour déterminer la tension entre les deux plaques, on doit trouver E_1 et E_2. L'application de la loi de Gauss sur la surface fermée S_1 donne

$$E_1 S = \frac{q - \sigma_{p,1} S}{\varepsilon_0} = \frac{q - \chi_1 \varepsilon_0 E_1 S}{\varepsilon_0}$$

parce que le champ électrique est nul dans chaque plaque du condensateur et que l'on néglige les effets de bords. L'expression précédente peut se réécrire

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 S(1+\chi_1)} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,1} S}$$

De manière équivalente, pour la surface S_2 on trouve

$$E_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,2} S}$$

La tension entre les deux plaques est donc

$$U = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{qd}{2\varepsilon_0 S} \left(\frac{1}{\varepsilon_{r,1}} + \frac{1}{\varepsilon_{r,2}} \right)$$

Finalement, on peut déterminer la capacité du condensateur :

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d} \left(\frac{\varepsilon_{r,1} \cdot \varepsilon_{r,2}}{\varepsilon_{r,1} + \varepsilon_{r,2}} \right)$$

(b) Pour cette configuration, deux méthodes sont possibles :
<u>Méthode 1 :</u> En utilisant un raisonnnement similaire à la question précédente, mais en notant $q = q_1 + q_2$ avec q_1 et q_2 l'accumulation de charge sur les plaques en face de chaque diélectrique, on obtient

$$E_1 = \frac{2q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,1} S}$$
$$E_2 = \frac{2q_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,2} S}$$

Et pour la différence de potentiel entre les deux plaques, on a

$$U_1 = \frac{2q_1 d}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,1} S}$$
$$U_2 = \frac{2q_2 d}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,2} S}$$

Or l'ensemble de la plaque conductrice est à la même tension, cela implique que $U = U_1 = U_2$ et donc

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\varepsilon_{r,1}}{\varepsilon_{r,2}}$$

Par définition de la capacité du condensteur, on a

$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{U} \\ &= \frac{q_1 + q_2}{2q_2 d/(\varepsilon_0 \varepsilon_{r,2} S)} \\ &= \frac{\varepsilon_0 S}{d} \varepsilon_{r,2} \frac{\frac{q_1}{q_2} + 1}{2} \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'expression du ratio des charges en face de chaque diélectrique, on obtient en effet

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{\varepsilon_{r,1} + \varepsilon_{r,2}}{2}$$

Méthode 2 : En négligeant les effets de bords, on peut voir ce condensateur comme étant l'équivalent de deux condensateurs en parallèle, chacun avec une surface $S/2$. Les capacités des deux condensateurs sont (voir cours) :

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,1} (S/2)}{d}$$
$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,2} (S/2)}{d}$$

où ε_0 est la permittivité du vide. Comme la capacité équivalente C_{eq} des deux capacités C_1 et C_2 en parallèle est donnée par $C_{eq} = C_1 + C_2$ (voir série 9, exercice 4), on trouve bien que la capacité du condensateur est $C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r,1} + \varepsilon_{r,2}) S}{2d}$.
NB : cette méthode ne devrait pas être appliqué au cas précédent du fait de l'abscense de conducteur éléctrique à l'intrerfaces entre les deux diélectriques, mais en pratique elle donnerait tout de même le bon résultat.

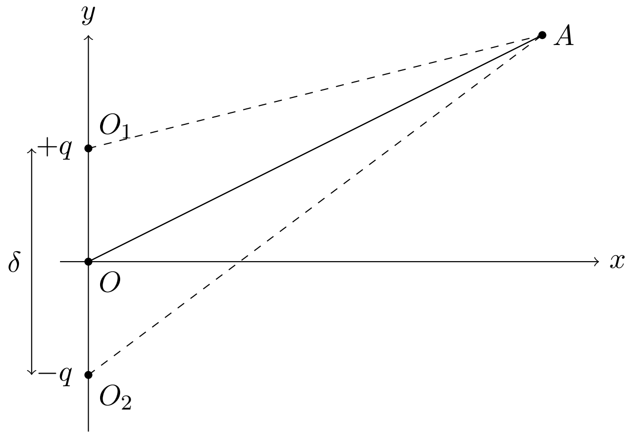
Exercice 2 : Champ et potentiel d'un dipôle électrique

Soient deux charges $+q$ et $-q$ séparées par une distance δ.
On définit $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$, $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\delta \vec{e}_y = \frac{1}{2}\vec{\delta}$, $\overrightarrow{OO_2} = -\frac{1}{2}\delta \vec{e}_y = -\frac{1}{2}\vec{\delta}$, avec $\|\vec{r}\| \gg \|\vec{\delta}\|$.

(a) Écrire le potentiel en A en ne gardant que les termes du premier ordre en δ.
(b) Dans la même approximation, trouver le champ $\vec{E}$.

Indication :

$$\frac{1}{\|\vec{r} + \vec{\epsilon}\|} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} + \mathcal{O}(\|\vec{\epsilon}\|^2)$$



Solution :

(a) Le potentiel en A vaut

$$V(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\overrightarrow{O_1A}\|} - \frac{1}{\|\overrightarrow{O_2A}\|}\right],$$

avec

$$\overrightarrow{O_1A} = -\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OA} = (\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{\delta}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_2A} = -\overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{OA} = (\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{\delta}).$$

Donc, le potentiel peut être réécrit comme

$$V(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{\delta}\|} - \frac{1}{\|\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{\delta}\|}\right],$$

et en utilisant le développement de l'indication et en négligeant les termes en $O(\delta^2)$:

$$\begin{aligned} V(A) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{1}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{\delta}}{\|\vec{r}\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{1}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{\delta}}{\|\vec{r}\|^3}\right] \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{\delta}}{\|\vec{r}\|^3}. \end{aligned}$$

On définit le moment dipolaire $\vec{p}$ tel que

$$\vec{p} = q\vec{\delta}.$$

Ainsi

$$V(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3},$$

où cette expression n'est valable que si $\|\vec{r}\| \gg \|\vec{\delta}\|$. La dimension de V est correcte bien que l'on ait au dénominateur $\|\vec{r}\|^3$. Mais notez que pour un $\vec{p}$ donné, V décroît en $1/\|r\|^2$! Vous pouvez voir la comparaison entre le potentiel d'une seule charge et d'un dipôle dans les figures 1 et 2.

(b)

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{r} &= q\delta\vec{e}_y\cdot(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z)\\ &= qy\delta\end{aligned}$$

On en déduit donc le potentiel V en un point (x, y, z) :

$$V(x,y,z) = \frac{qy\delta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[qy\delta(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right]$$

Donc le champ électrique est :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}V\\ &= -\left[\vec{e}_x\frac{\partial V}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial V}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial V}{\partial z}\right]\\ &= \frac{q\,\delta}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[3\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\vec{e}_x+\left(3\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\vec{e}_y+3\frac{zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\vec{e}_z\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r}-\frac{1}{r^3}\vec{p}\right)\end{aligned}$$

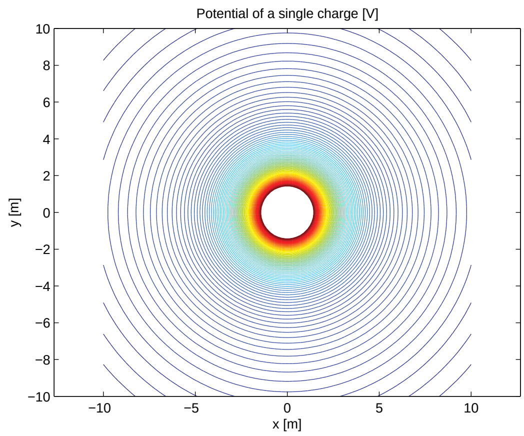


Figure 1 – Potentiel d'une seule charge

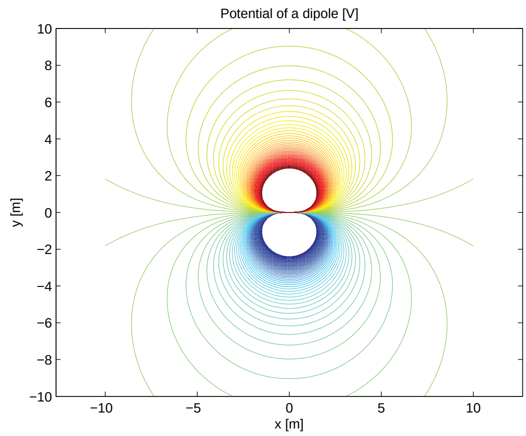
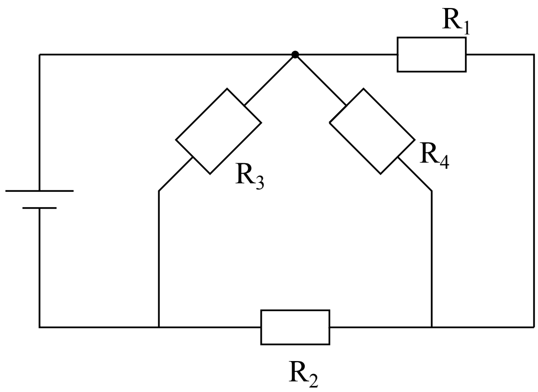


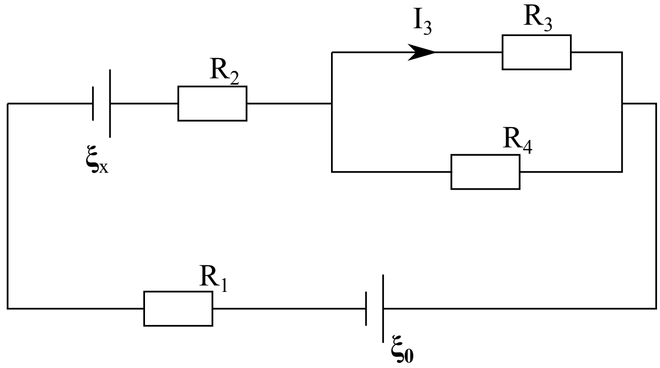
Figure 2 – Potentiel d'un dipôle

Exercice 3 : Étude des circuits - partie 1

(a) Calculez la résistance équivalente dans le circuit suivant

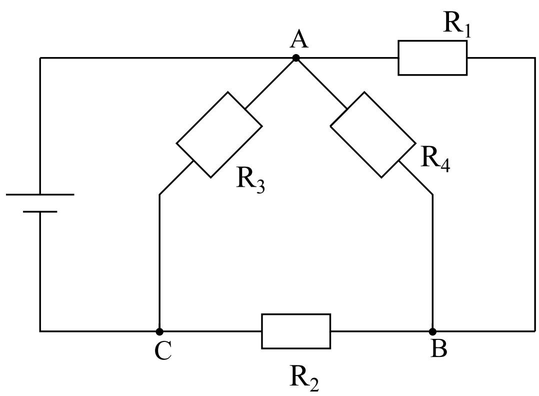


(b) Trouvez la fem inconnue ξ_x dans le circuit suivant sachant les valeurs des résistances R_1, R_2, R_3 et R_4, la fem ξ_0 et le courant I_3.

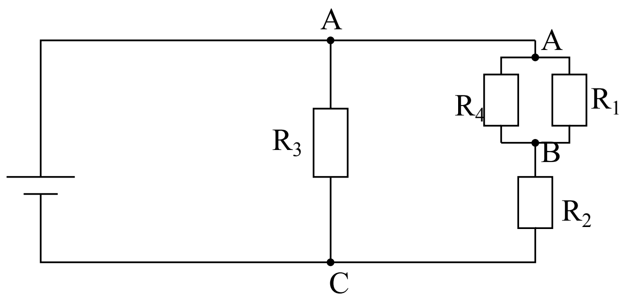


Solution :

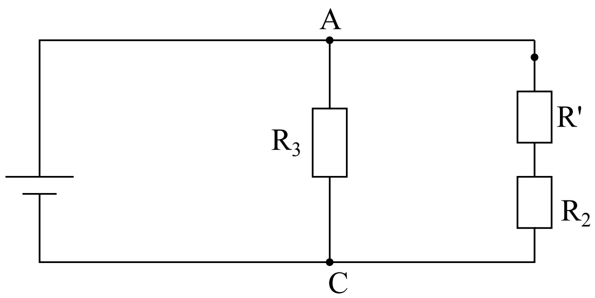
(a) Tout d'abord, commençons par réaliser un schéma du circuit qui nous permettra de mieux visualiser le système. Pour ce faire, on choisit un nom indicatif pour chaque noeud du schéma initial :



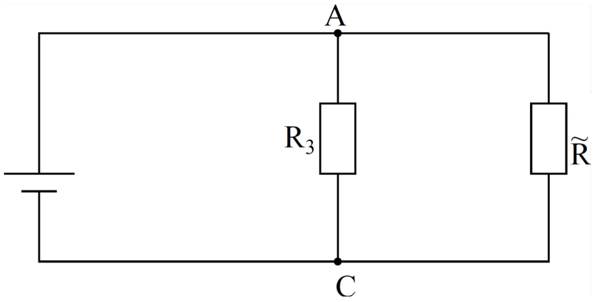
On peut donc représenter la schéma de la manière suivante :



Ce circuit est équivalent au circuit :



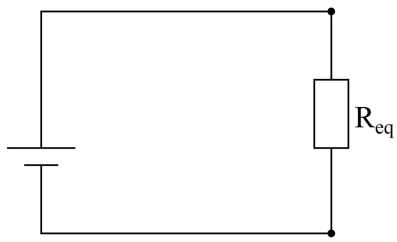
avec $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}$ car les deux résistances R_1 et R_4 sont en parallèle. D'où $R' = \frac{R_1 R_4}{R_1+R_4}$.
Le circuit de la figure est équivalent à



où $\tilde{R} = R' + R_2$ car R' et R_2 sont en série.
Alors

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} \\
&= \frac{R_2(R_1 + R_4) + R_1 R_4}{R_1 + R_4} \\
&= \frac{R_2 R_1 + R_2 R_4 + R_1 R_4}{R_1 + R_4}
\end{aligned}$$

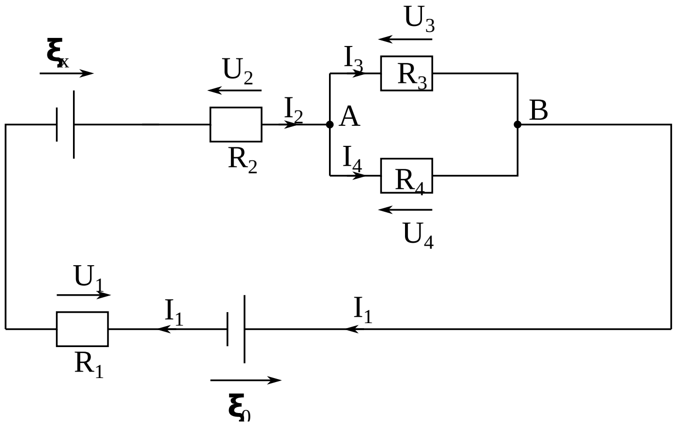
Finalement, le circuit de la figure au dessus est équivalent au circuit suivant :



où $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{\tilde{R}} + \frac{1}{R_3}$ car $\tilde{R}$ et R_3 sont en parallèle.
D'où

$$\begin{aligned}
R_{eq} &= \frac{\tilde{R} R_3}{\tilde{R} + R_3} \\
&= \frac{R_1 R_2 R_3 + R_2 R_4 R_3 + R_1 R_4 R_3}{R_1 + R_4} \cdot \frac{R_1 + R_4}{R_1 R_2 + R_2 R_4 + R_1 R_4 + R_3(R_1 + R_4)} \\
&= \frac{R_1 R_2 R_3 + R_2 R_4 R_3 + R_1 R_4 R_3}{R_1(R_2 + R_4 + R_3) + R_4(R_2 + R_3)}
\end{aligned}$$

(b) Pour résoudre ce problème, on va annoter le circuit et définir plusieurs variables. On se servira des lois de Kirchoff (loi des noeuds et loi des mailles) pour résoudre le problème.



On peut choisir arbitrairement le sens des courants dans le circuit, ceux-ci étant des grandeurs algébriques. Ainsi, si on se trompe de sens, le courant obtenu sera simplement négatif et les calculs resteront valables.
Notez les points suivants : pour déterminer le sens de l'augmentation des tensions U_1, U_2, U_3, U_4 à travers les résistances, il suffit de prendre le sens opposé au courant qui traverse la résistance. Pour déterminer le sens de ξ_0 et ξ_x, on va du "-" vers le "+".
On peut maintenant résoudre le circuit.
La loi des noeuds nous donne :
— noeud A : $I_2 = I_3 + I_4$
— noeud B : $I_3 + I_4 = I_1$
De plus, on peut dire que $I_1 = I_2$, car le courant qui rentre en ξ_x doit ressortir.
D'où

$$I_1 = I_2 \tag{1}$$

$$I_1 = I_3 + I_4 \tag{2}$$

On peut maintenant utiliser la loi des mailles.
— Grande maille : $\xi_0 + U_3 + U_2 - \xi_x + U_1 = 0$
— Maille AB : $U_3 - U_4 = 0$
D'où

$$\xi_x = U_1 + U_2 + U_3 + \xi_0 \tag{3}$$

et

$$U_3 = U_4 \tag{4}$$

On sait que

$$U_1 = R_1 I_1 \tag{5}$$

$$U_2 = R_2 I_2 \tag{6}$$

$$U_3 = R_3 I_3 \tag{7}$$

$$U_4 = R_4 I_4 \tag{8}$$

On a donc 8 équations pour 8 inconnues (I_1, I_2, I_4, U_1, U_2, U_3, U_4, ξ_x). On peut donc résoudre le système.

$$\begin{aligned}\xi_x &= R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + \xi_0 \\ &= R_1(I_3 + I_4) + R_2(I_3 + I_4) + R_3 I_3 + \xi_0\end{aligned}$$

D'autre part, par (4) et (8)

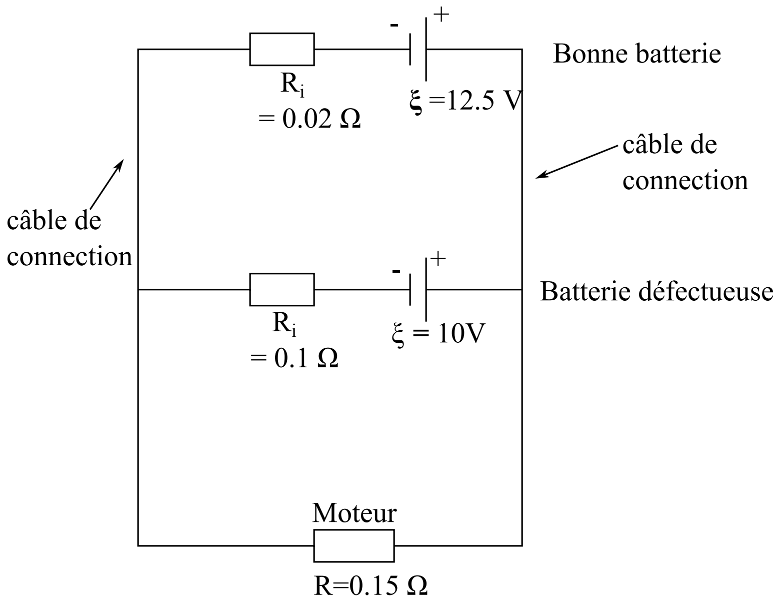
$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{U_3}{R_4} = \frac{R_3 I_3}{R_4}$$

D'où

$$\xi_x = \xi_0 + I_3 \left(R_1 + \frac{R_1 R_3}{R_4} + R_2 + \frac{R_2 R_3}{R_4} + R_3 \right)$$

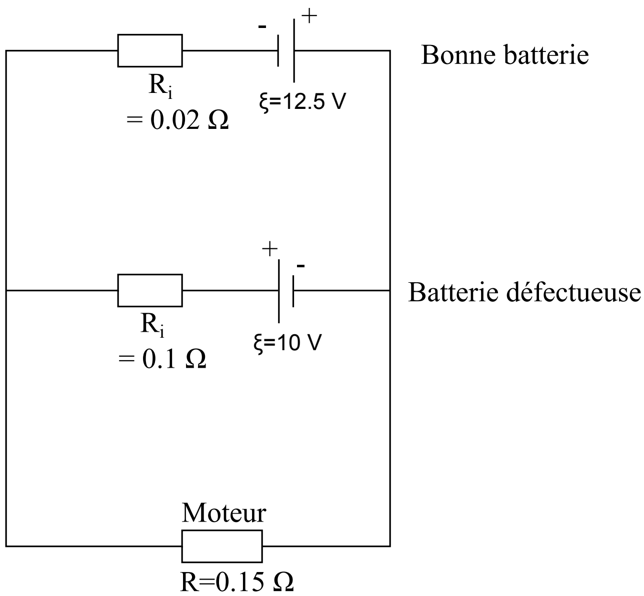
Exercice 4 : Étude des circuits - partie 2

(a) Votre batterie de voiture est à plat. Lorsque votre batterie est à plat, vous faites le circuit suivant avec une bonne batterie :



Calculez le courant I dans le moteur.

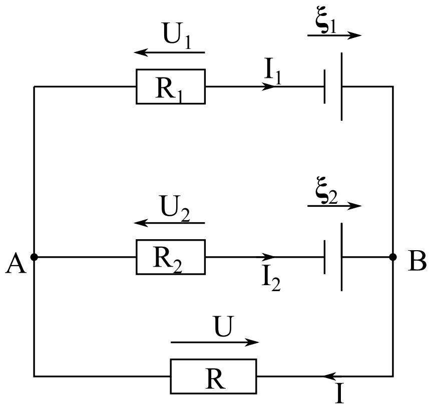
(b) Cette fois, vous avez fait une erreur de branchement.



Pourquoi ce montage est-il dangereux ?

Solution :

(a) On peut faire le schéma suivant :



où R_1 est la résistance interne de la bonne batterie, R_2 la résistance interne de la batterie de la voiture et R la résistance du moteur.

On utilise la loi des noeuds :

— noeud A :

$$I = I_1 + I_2 \tag{9}$$

— noeud B (qui donne la même information) :

$$I_2 + I_1 = I \tag{10}$$

Et la loi des mailles :

— Maille du haut :

$$\xi_1 - \xi_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0 \tag{11}$$

— Maille du bas :

$$\xi_2 - RI - R_2 I_2 = 0 \tag{12}$$

L'eq. (12) nous donne

$$I_2 = \frac{\xi_2 - RI}{R_2} \tag{13}$$

L'eq. (10) et (13) nous permettent d'écrire

$$I_1 = I - I_2 = I - \frac{\xi_2 - RI}{R_2} \tag{14}$$

Avec les eqs. (13) et (14), nous éliminons I_1 et I_2 dans l'eq. (11) :

$$\xi_1 - \xi_2 + \xi_2 - RI - R_1 I + \frac{R_1}{R_2}(\xi_2 - RI) = 0$$

Multiplions par R_2 :

$$R_2\xi_1 - R_2 RI - R_2 R_1 I + R_1 \xi_2 - R_1 RI = 0$$

Avec ceci, on trouve pour I :

$$I = \frac{R_2\xi_1 + R_1\xi_2}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2} = 72.5 \text{ A.} \tag{15}$$

(b) Pour connaître l'effet du changement de polarité de la batterie défectueuse sur le circuit, si on garde les même définitions des directions des courants dans la partie (a), il suffit de remplacer la valeur de ξ_2 par $\xi_2 = -10V$ dans les expressions de la partie (a). A présent il est intéressant de calculer la valeur des courants I, I_1 et I_2.

$$I = 52.5 \text{ A} \tag{16}$$

Grâce à (13) on trouve :

$$I_2 = -178.75 \text{ A} \tag{17}$$

Notez que $I_2 < 0$, cela nous dit que I_2 passe dans la direction opposée à notre définition. Enfin avec (10) :

$$I_1 = 231.25 \text{ A} \tag{18}$$

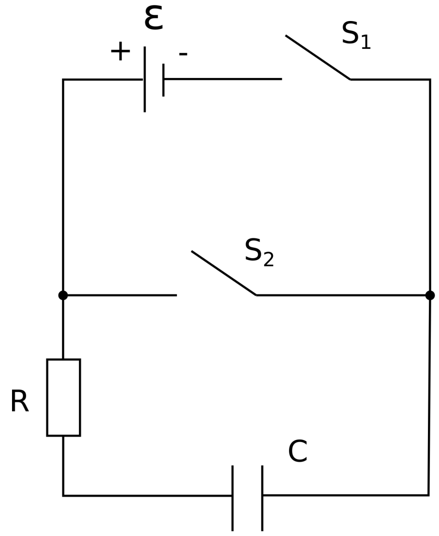
Les courants qui passent au niveau des batteries sont très élevés et risquent de faire fondre les fils de connecteurs qui portent en toute rigueur une certaine résistance électrique. On peut calculer les courants dans le cas (a) :

$$I_2 = \frac{\xi_2 - RI}{R_2} = -8.75 \text{ A} \tag{19}$$

$$I_1 = I - I_2 = 81.25 \text{ A} \tag{20}$$

On peut voir que ces courants sont beaucoup plus bas que dans le cas avec l'erreur de branchement.

Exercice 5 : Circuit RC
On considère la situation suivante :

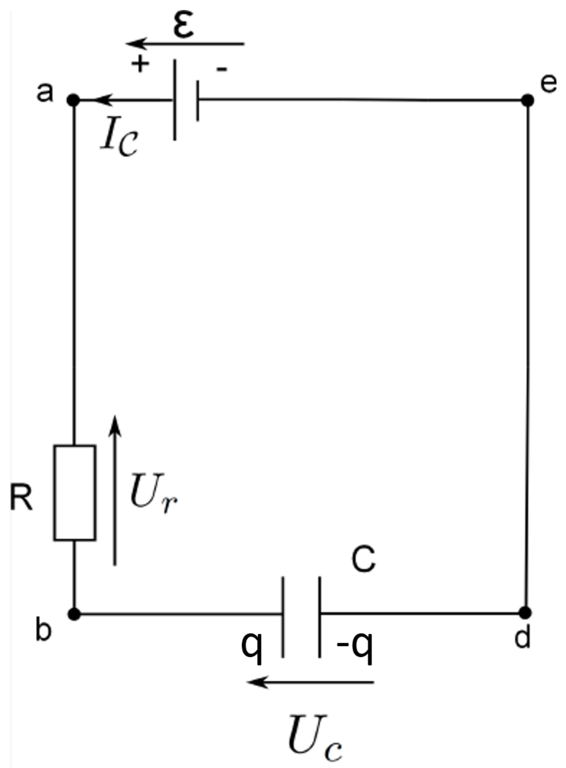


(a) Dans un premier temps l'interrupteur S_1 est fermé et l'interrupteur S_2 est ouvert. Le condensateur C (initialement non chargé) se charge grâce à la force électromotrice (fem) ε. La charge s'arrête lorsque la différence de tension aux bornes de C vaut ε. Écrire l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge du condensateur et la résoudre.

(b) On ouvre alors S_1 et on ferme S_2. Le condensateur se décharge. Écrire l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge du condensateur et la résoudre.

Solution :

(a) Le circuit formé est



On peut "voir" que la fem amène des charges + du pôle + au point b du condensateur. La loi des mailles s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= -U_r(t) - U_c(t) + \varepsilon \\ \Rightarrow \varepsilon &= RI_{\mathcal{C}}(t) + \frac{q(t)}{C} \end{aligned}$$

Le courant de charge $I_{\mathcal{C}}$ s'exprime par $I_{\mathcal{C}}(t) = \frac{dq}{dt}$. On obtient donc l'équation différentielle :

$$\frac{\varepsilon}{R} = \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{RC} \tag{21}$$

Cette equation est de la forme

$$a_n \frac{d^n}{dx^n} y + ... + a_2 \frac{d^2}{dx^2} y + a_1 \frac{d}{dx} y = b \tag{22}$$

qui est un equation différentielle linéaire à coefficiants a_i constants. La solution générale de ce type d'equation est donnée par la solution générale de l'equation homogéne (qui veut dire l'equation avec $b = 0$) plus une solution quelconque (appelé solution particulière) de l'equation complète. Dans notre cas, l'equation homogène est donnée par

$$\frac{dq_h(t)}{dt} + \frac{q_h(t)}{RC} = 0 \tag{23}$$

On trouve sa solution en cherchant une solution de la form $q_h(t) = q_0 e^{\alpha t}$. Ceci est une solution si $\alpha = -\frac{1}{RC}$, donc :

$$q_h(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Pour trouver une solution particulière, on cherche une solution $q_p(t) = const$. Ceci est une solution si

$$\frac{dq_p(t)}{dt} + \frac{q_p}{RC} = \frac{\varepsilon}{R} = 0 + \frac{k}{RC}$$

qui est le cas pour $k = \varepsilon C$. On trouve donc que

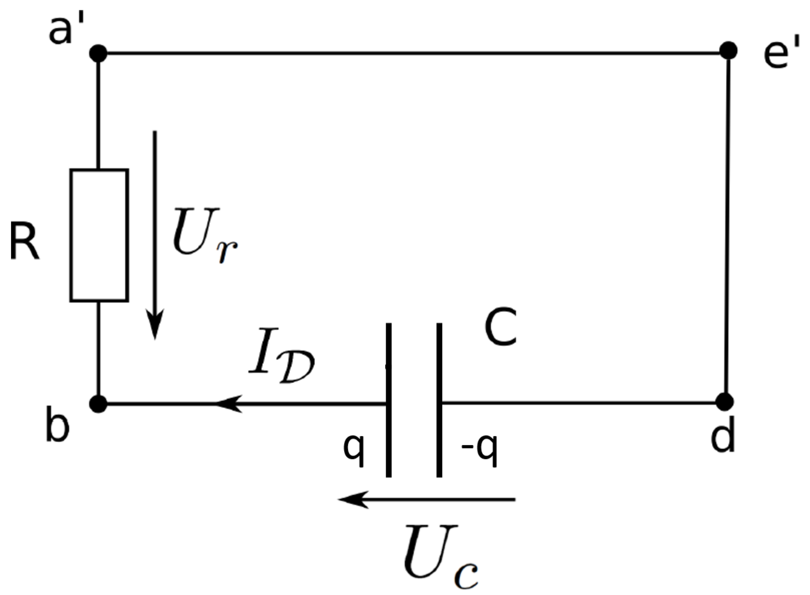
$$q(t) = q_0 e^{-t/RC} + \epsilon C \tag{24}$$

Avec la condition initiale $q(0) = 0$ (le condensateur est initialement déchargé), on trouve :

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

On voit que pour un temps $t \to \infty$, $q \to C\varepsilon$.

(b) Le circuit avec S_1 ouvert et C_2 fermé prend la forme suivante



La loi des mailles s'écrit :

$$\begin{aligned} & -U_r(t) + U_c = 0 \\ \Rightarrow \quad & -R\, I_\mathcal{D} + \frac{q(t)}{C} = 0 \end{aligned}$$

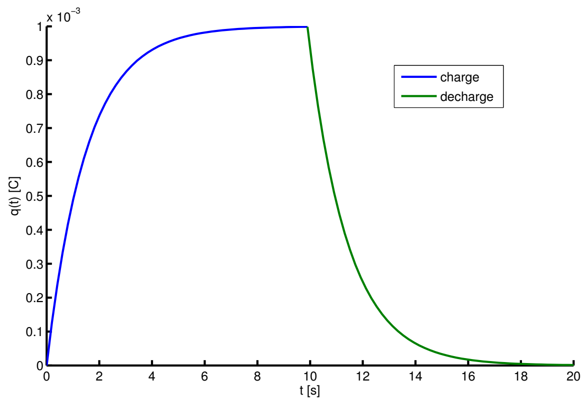
Mais attention dans ce cas le courant de décharge s'exprime $I_\mathcal{D} = -\frac{dq}{dt}$. Il y a changement de signe par rapport au cas précédent car la convention prise pour le sens de l'intensité est différente (convention générateur). Donc on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

La solution de cette équation différentielle avec la condition initiale $q(0) = C\varepsilon$ est :

$$q(t) = C\varepsilon\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

L'évolution temporelle de la charge au condensateur pendant les 2 phases est illustrée par la figure ci-dessous ($\varepsilon = 10\ V$, $R = 1.5 \times 10^4\ \Omega$, $C = 1 \times 10^{-4}\ F$).



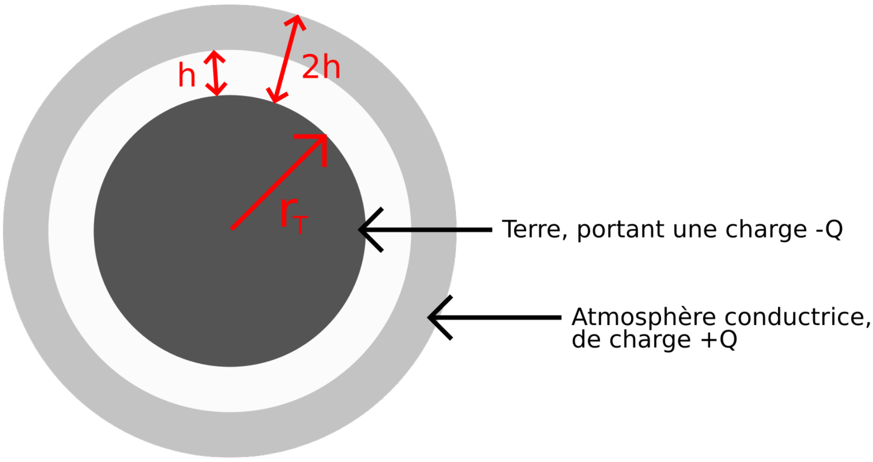
Exercice 6 : La Terre, un condensateur sphérique (Examen 2018)

La Terre est constamment frappée par des éclairs, dont la grande majorité transportent des charges négatives vers le sol. Cela a pour effet de charger négativement la Terre et positivement la haute atmosphère, située entre les altitudes h et $2h$. La Terre et la haute atmosphère peuvent être considérée comme de bon conducteurs.

Dans un premier temps, on ne tient pas compte de la présence des éclairs et on considère une situation électrostatique.

On assimile la Terre ainsi que la haute atmosphère à des conducteurs sphériques, isolés électriquement lun de lautre par la couche de basse atmosphère, isolante, située entre les altitudes 0 et h.

La Terre porte une charge $-Q$, et la haute atmosphère une charge $+Q$. On suppose que le reste de l'espace est constitué de vide.



(a) Dessinez qualitativement la situation en régime statique, en indiquant la direction et le sens du champ électrique $\vec{E}$ ainsi que la distribution des charges.

(b) Déterminez $\vec{E}$ dans tout l'espace.

(c) La tension entre la Terre et la partie conductrice de l'atmosphère vaut U =400 kV. Exprimez Q en fonction de U, r_T, et h. Déterminez la valeur de Q en considérant que r_T =6370 km, h =50 km et ϵ_0 =8.85 × 10^{-12} A^2 s^4 kg^{-1} m^{-3}.

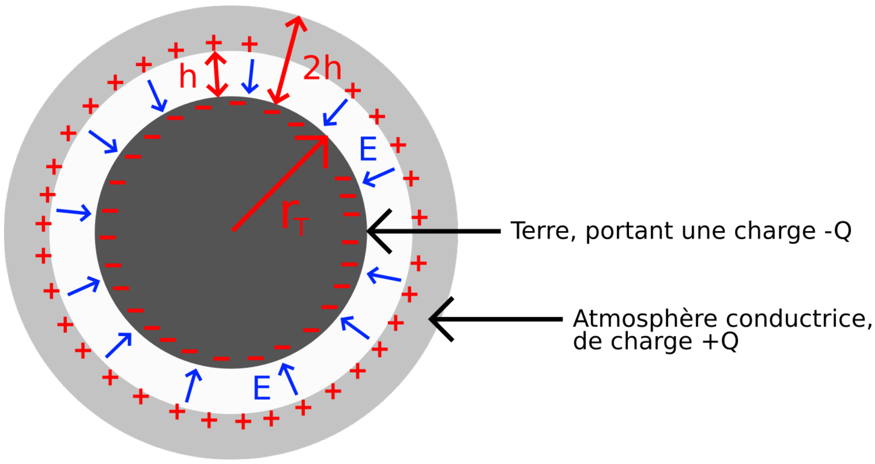
(d) Déterminez la capacité du condensateur formé par la Terre et par la partie conductrice de l'atmosphère. Quelle est l'énergie électrique stockée dans ce système ? Donnez les résultats sous forme d'expressions littérales avant de procéder à l'application numérique.

(e) En réalité, la basse atmosphère (l'air entre les deux conducteurs) n'est pas un isolant électrique parfait. Par conséquence, il se forme une densité de courant faible mais non-nulle dirigée vers la Terre. On considère que cette densité de courant est répartie de manière homogène à travers la surface extérieure de la Terre et qu'elle est constante dans le temps de telle sorte que l'on puisse l'écrire sous la forme $\vec{j}(\vec{r},t) = -j(r)\vec{e}_r$.

On suppose que la Terre est frappée par 100 éclairs par secondes, chacun apportant une charge de 20 C sur la Terre. Dans ce cas, quelle est la valeur de $j(r)$ à la surface de la Terre nécessaire pour que sa charge soit stationnaire ?

Solution :

(a) En considérant un régime statique, on a :



(b) De par la symétrie et invariances du problème par rapport au centre de la Terre (utilisé comme origine du repère sphérique), on a que $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$.
Afin de déterminer $E(r)$, on utilise la loi de Gauss intégrale qui s'écrit :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{25}$$

Pour le terme de gauche de l'équation 25, on considère comme surface de Gauss une sphère de rayon r et de centre identique à celui de la Terre (donc $d\vec{S} = dS\vec{e_r}$), ainsi on obtient :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

Pour le terme de droite de l'équation 25, on distingue 3 situations :
— Pour $r < r_T$ et $r \in]r_T + h, r_T + 2h[$, on a $\vec{E} = \vec{0}$, étant donné quen électrostatique, les charges se répartissent à la surface des conducteurs, de sorte que $Q_{int} = 0$; le champ électrique est donc toujours nul en leur sein.
— Pour $r \in]r_T, r_T + h[$, on a $Q_{int} = -Q$ et donc d'après la loi de Gauss :

$$4\pi r^2 E(r) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

D'où, pour le champ électrique :

$$\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

— Pour $r > r_T + h$ on a $Q_{int} = Q - Q = 0$. On obtient ainsi $\vec{E} = \vec{0}$ dans l'espace au delà de la haute atmosphère.

(c) La différence de potentiel donnée entre les deux conducteurs U =400 kV est reliée au champ électrique par la relation :

$$U = [\Phi(r)]_{r_T}^{r_T+h} = -\int_{r_T}^{r_T+h} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En considérant $d\vec{r} = dr\vec{e_r}$, on peut exprimer le résultat de l'intégrale en fonction de l'expression du champ électrique obtenu à la question précédente :

$$
\begin{aligned}
U &= \int_{r_T}^{r_T+h} E(r)dr \\
&= \int_{r_T}^{r_T+h} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_T}^{r_T+h} \frac{1}{r^2}dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_T}^{r_T+h} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_T+h}+\frac{1}{r_T}\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r_T+h}{r_T(r_T+h)}-\frac{r_T}{r_T(r_T+h)}\right) \\
&= Q\frac{h}{4\pi\epsilon_0 r_T(r_T+h)}
\end{aligned}
$$

D'où l'expression finale pour la charge Q en fonction des données de l'énoncé :

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r_T\left(1+\frac{r_T}{h}\right)U \tag{26}$$

Et en appliquant les valeurs numériques :
$Q = 4\cdot\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 6370\cdot 10^3\cdot\left(1+\frac{6370\cdot 10^3}{50\cdot 10^3}\right)\cdot 400\cdot 10^3 \approx 36\,385\,\mathrm{C}$

(d) Par définition, la capacité d'un condensateur est la quantité qui relie la charge porté à la différence de potentiel entre les deux électrode selon la relation $Q = CU$. Par identification avec le résultat de l'équation 26, on obtient

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_T\left(1+\frac{r_T}{h}\right)$$

En faisant l'application numérique :
$C = 4\cdot\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 6370\cdot 10^3\cdot\left(1+\frac{6370\cdot 10^3}{50\cdot 10^3}\right) \approx 0.091\,\mathrm{F}$
L'énergie stocké dans un condensateur de de charge C sous une tension U s'exprime $CU^2/2$. En explicitant avec les résultats précédents, on obtient l'expression suivante :

$$W = 2\pi\epsilon_0 r_T\left(1+\frac{r_T}{h}\right)U^2$$

En faisant l'application numérique :
$W = 2\cdot\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 6370\cdot 10^3\cdot\left(1+\frac{6370\cdot 10^3}{50\cdot 10^3}\right)\cdot(400\cdot 10^3)^2 \approx 7.28\times 10^9\,\mathrm{J}$

(e) Le courant I apporté par les éclairs est :

$$I[A \equiv C\cdot s^{-1}] = -20[C]\cdot 100[s^{-1}]$$

Ainsi, la densité de courant nécessaire pour compenser l'apport de charge dû au éclairs peut être calculée pour la surface de la Terre :

$$j = -\frac{I}{4\pi r_T^2}$$

En faisant l'application numérique :
$j = -\frac{-20\cdot 100}{4\pi(6370\cdot 10^3)^2} \approx 3.92\times 10^{-12}\,\mathrm{A\,m^{-2}}$